# Бесконечность или неопределенность?

**В. Э. ДЕВУЦКИЙ**

Показывается, что никакие огромные или исчезающе малые числа никогда не смогут перейти в область подлинно бесконечных значений, так как последние являются лишь мыслимыми человеческим сознанием *образами*, в то время как числа (или величины), сколь большими или малыми они ни были – объекты *реальные*. Данное состояние в статье называется парадоксом *трансфертизации* (невозможность перехода). Для преодоления парадокса создается особая алгебра неопределенно больших и неопределенно малых величин.

It is shown that no huge or infinitesimal numbers can pass into the field of really infinite values as the latter are only the *images* of human consciousness while values, very big or small, are *real* objects. In the article this state is called transfertisation paradox (impossibility of transition). To overcome the paradox special algebra of indeterminate big and indeterminate small values is created.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бесконечные величины; алгебра неопределенных величин; алгебра невоспроизводимых величин; парадокс трансфертизации.

KEY WORDS: infinite quantities, algebra of indeterminate quantities, algebra of irreproducible values, transfertisation paradox.

Кто не испытывал необычного и несколько пугающего чувства, когда пытался представить себе величие и мощь бесконечного – числа, времени, пространства, массы? О бесконечности много думали и спорили древние греки. Знаменитые апории Зенона – лишь одно историческое свидетельство этих размышлений. Традиционно человек воображает себе бесконечность как некое огромное число, но насколько оно должно быть огромным – тут его фантазии явно не хватает. Г. Кантор, занимаясь проблемой бесконечных множеств, пришел, казалось бы, к парадоксальным выводам. По его представлениям любая ничтожно малая часть бесконечности равна самой бесконечности. Привычная логика отказывается в это верить.

Красивую метафору бесконечного создали древние индусы. Далеко на севере стоит высоченная алмазная гора. Раз в тысячу лет к ней прилетает бабочка и нежно касается её крылышками. Когда бабочка полностью источит гору – пройдет один день вечного времени Будды! Удивительно то, что продолжительность одного дня Будды не столь уж непостижима. Если предположить, что бабочка за одно посещение уносит на крылышках всего лишь один атом углерода, а гора имеет массу, скажем $10^{14}$ *кг*, то божественный день продлится примерно $10^{43}$ земных лет.

По-настоящему большие числа гораздо легче выражать с помощью степенных этажей. Поставим друг за другом три уменьшающиеся в размерах десятки. Это краткая запись числа, которое содержит после единицы десять миллиардов нулей. Подставив еще одну десяточку меньшего размера, мы выразим число, содержащее нулей в десять миллиардов раз больше (а именно сто квинтильонов!). Строчка, в которой разместится этот гигант, растянется на 50 световых лет!

Но нетрудно составить мысленно и такое число: пусть пространство одного электрона обозначает огромную величину (скажем, число секунд в дне Будды – $10^{50}$). Тогда размещенный рядом второй условный электрон станет указывать степень столь же огромной величины. Третий электрон станет степенным показателем второго и так далее. Один кубический метр пространства в состоянии вместить около $10^{43}$ электронов.

Доступная нам для обозрения часть Вселенной составляет примерно $10^{78}$ кубических метров. Мысленно заполнив её плотной упаковкой электронов, каждый из которых является символом числа секунд в дне Будды и каждый есть очередной показатель степени, мы получим умопомрачительное число. Однако, так как все значения являются здесь конечными величинами, то и результат будет, вообще говоря, конечным. Следовательно, до исчерпания подлинной бесконечности этому числовому монстру столь же далеко, как, скажем, числу $10^{10^{10}}$.

Этот пример хорошо иллюстрирует меру наивности человеческого сознания, для которого образ бесконечности является прямым продолжением простого числового ряда (тысяча – миллион – миллиард – далее бесконечность). Менее наивными выглядят профессиональные математики, которые хотя и кладут бесконечность основанием практически всех областей своей науки (бесконечные ряды, бесконечные дроби, бесконечные суммы, бесконечно малые и т.д.), но в своих вычислениях останавливаются только на нескольких первых членах. Но может быть идея бесконечности вовсе и не должна входить в круг необходимых философско-математических или физических категорий?

Работа напрямую с понятием бесконечности уязвима с гносеологической точки зрения, так как оно недосягаемо ни для строгого теоретического обоснования, ни для самого пылкого воображения. Поистине антагонистическое противоречие заключено в канторовском понятии *бесконечного счетного множества.*

Человеку кажется, что если большие числа векторно стремятся к бесконечности, то в какой-то области они должны бы в нее перейти. Однако это стойкое логическое заблуждение. Хорошо известно, что сама по себе актуальная бесконечность ($+\infty$, $-\infty$) не есть число или даже область чисел. Это удобный мыслительный образ, символ, некое интуитивное ощущение *безграничности.* Отсюда вытекает принципиальная *несопоставимость* данных объектов: бесконечности и реального числового ряда. Онтологически они принадлежат разным срезам сознания. От *образа* нельзя отнять *число* с тем, чтобы получить какое-то другое *число.* Даже выражение "$\infty$ минус $\infty$" не имеет (и не может иметь) никакого математического (числового) наполнения. Иными словами, от актуальной бесконечности невозможно перейти ни к какому сколь угодно большому *конкретному* числу. Назовем это состояние *парадоксом трансфертизации* (невозможности перехода).

Данные рассуждения можно отнести ко всем другим пределам. Например, *1/3* в десятичной записи (неудобной для данного числа в данной разновидности счисления) превращается в бесконечную дробь *0,3333…* которая *никогда* не станет точным эквивалентом *1/3*. Это значит, что не существует никакого прямого перехода от "идеального" и достоверного *1/3* к всегда приблизительному *0,333…*

Не столь однозначна ситуация с нулем. Нуль *абсолютный, тождественный* – на числовой оси равноправное со всеми прочими *конкретное* число. Однако нуль как *предел*, к которому безгранично стремятся очень маленькие величины, числом уже *не является*. Это также мыслимый образ, символ, передающий интуитивное ощущение безграничной малости. Парадокс *трансфертизации* состоит здесь в том, что не существует никакого наименьшего числа, которое превращало бы *образ нуля* (как предела) в "первое после нуля" число вида *x/y*.

Таким образом, любой предел (в математике, физике, философии) – лишь призрачно маячащий горизонт, добраться до которого никому не суждено.

В альтернативной теории множеств чешского математика П. Вопенки [Вопенка 1983] актуальная бесконечность признается *особым неопределённо конечным* объектом (данная идея, вообще говоря, восходит еще ко временам Левкиппа и Демокрита). И это вроде бы позволяет включить идею бесконечности в привычное математическое пространство. Идея замены бесконечных множеств неопределенно конечными высказана в труде. Я. Сергеева [Сергеев 2003], который вводитв математический обиход понятие "гросс-единица" – аналога бесконечного счетного множества Кантора. Однако попытки традиционной работы с такой "конечной бесконечностью" быстро обнаруживают странные результаты, не позволяющие разорвать кольцо логически неразрешимых противоречий. Видимо, одних только понятий неопределенно конечных больших и малых количеств недостаточно. Необходима особая модель математической логики, способная дать основания для непротиворечивого понимания свойств суперогромных (или – с другой стороны – исчезающе малых), непредставимых разумом величин.

Изложим принципы несколько иной алгебры, изначально свободной от парадоксов *трансфертизации*, но оперирующей, соответственно, и несколько иным типом математической парадигматики. Применение этой алгебры способно участвовать в решении многих логических и математических задач. Но главное, *инаковость* и сравнительная простота аксиом этой алгебры дают возможность применять ее в качестве аналитического инструмента для исследования выводов, теорем, решений в тех областях философско-математических представлений, которые, в силу закольцованности внутренних, имманентно им присущих противоречий, не могут в должной мере критически оценить свои результаты.

Итак, в тех многочисленных случаях, когда физики и математики вынуждены говорить о *бесконечных* величинах, процессах или операциях, мы предлагаем ввести в широкий обиход понятие *неопределенно большой* величины, которая, конечно же, не может быть сопоставлена с грандиозностью (и с принципиальной непознаваемостью) бесконечного объекта, но, тем не менее, удовлетворяет многие запросы материального обеспечения философской, математической или физической логики.

Противоположное явление – *неопределенно малая* величина, неограниченно стремящаяся к нулю, но никогда не принимающая истинно нулевого значения. В этом плане удобно говорить о *двух* видах *нуля*: абсолютном (тождественном), означающем *ничто* (математически он функционирует при вычитании из определенного числа *абсолютно тождественного* ему числа) и *дифференциальном* нуле, получающемся при делении какого-либо числа на число несоизмеримо большее. В дальнейшем будем обозначать неопределенно большую величину символом $\Re$, а неопределенно малую – дифференциальный нуль – символом $\theta$. Так как $\Re$ – не совсем "бесконечность", а $\theta$ – не "абсолютный нуль", то возможно создание особой логически строгой *алгебры неопределенных величин*, с которыми можно производить любые стандартные алгебраические операции без ограничений, типа "абсурдности деления на нуль" или "бессмысленности умножения на бесконечность".

Введем, кроме того, представление еще о двух объектах подобной алгебры: символом *n* будем обозначать *конкретное* число из обычного земного арсенала, символом *q* обозначим *любое произвольное* число (это также особый *неопределенный* объект, который может быть любым рядовым числом, но вообще говоря, он может быть сопоставим с $\Re$ или $\theta$). Вот основные уравнения алгебры неопределенных величин:

$$\Re + n = \Re;\ \Re \times n = \Re;\ \Re \times 0 = 0;\ \Re / n = \Re;\ \Re^n = \Re;\ \Re^\Re = \Re;\ n / \Re = \theta;$$
$$\theta \times n = \theta;\ \theta \times 0 = 0;\ \theta / n = \theta;\ \theta^{\,n} = \theta;\ \Re / \theta = \Re;$$
$$\Re - \Re = q;\ \Re \times \theta = q;\ \Re^\theta = q;\ \Re / \Re = q;\ \theta / \theta = q;\ \theta^\theta = 0 < q < 1.$$

Сразу осветим несколько принципиальных вопросов, которые возникают из-за непривычности приведенных формул. Что означает здесь знак равенства? Ведь если все (кроме *n*) величины неопределенные, то и никакой математической тождественности выражений быть не может? Один из ответов на этот вопрос сводится к тому, что знак равенства имеет здесь некое *условное* значение, т.е. уравнения работают лишь в *определенной области* возможных значений, хотя и не противоречат очевидной математической логике. Знак неравенства в этом случае стал бы означать экзистенциально невозможное, невероятное соотношение, например, $\Re^n \neq \theta$ или $\theta^n \neq \Re$ (при $n > 1$).

Однако если усвоить новое – непривычное, но очень важное обстоятельство, – а именно, принципиальную *нетождественность* величин $\Re$ и $\Re$, $\theta$ и $\theta$, $q$ и $q$, получаемых в разных преобразованиях или стоящих на разных местах в пределах одного уравнения, то все формулы алгебры неопределенных величин могут рассматриваться как реальные *тождества*, так как конкретный подбор этих $\Re$, $\theta$, $q$ (или $\Re$, $\theta$, $q$, стоящих в уравнении на разных местах) *всегда* может подразумевать выполнение условий именно полной тождественности левой и правой частей уравнения. Следует одновременно учесть, что $\Re$, $\theta$, $q$ – это *невоспроизводимые* числа и величины (речь о которых впереди). Поэтому стандартные выражения $\Re - \Re = 0$; $q - q = 0$; $\theta - \theta = 0$, а также $\Re / \Re = 1$; $q/q = 1$; $\theta/\theta = 1$ в этой алгебре являются если и возможными, то крайне редко достижимыми (фактически *недостижимыми*!).

Многие уравнения этой алгебры *необратимы* или *не полностью обратимы*, что, между прочим, является не минусом, а скорее плюсом метода, так как вносит в него динамику и некоторую аналогию с необратимостью энтропии или течения *времени*. Так, если $n/\Re = \theta$, то прямое преобразование $\Re \times \theta = n$ если и возможно, то при крайне редком стечении обстоятельств (по сути – оно *невозможно*: ведь и $\Re$ и $\theta$ в преобразованном выражении уже совершенно другие *произвольные* величины). Зато всегда справедливым является новый алгебраический стандарт $\Re \times \theta = q$, где $q$ – любая произвольная величина, включая $\Re$ и $\theta$ (формально – включая, разумеется, и $n$). Можно пояснить это и на языке теории энтропии: разобрать сложное целое на мельчайшие фрагменты можно, но вот собрать конкретную исходную целостность назад практически нельзя!

Смысл неопределенно малой величины $\theta$ может быть наглядно выражен при уточнении обсуждавшегося выше равенства $1/3 = 0{,}333... + \theta$. Череду троек можно оборвать в любом месте, но ее продолжение как раз и будет подразумеваться под символом $\theta$. При этом, чем точнее (длиннее) будет дана десятичная дробь, тем меньше будет становиться $\theta$. Истина (подтверждающая парадокс трансфертизации) в том, что череда троек *никогда* не кончится, а любая попытка заменить тройку четверкой сразу дает “перебор”. Но любое наперед предусмотренное значение “остатка” $\theta$ в свою очередь можно разбить на неопределенно большое количество новых троек: $\theta : \Re = \theta$ и, следовательно, никакое “последнее” $\theta$ никогда не превратится в тождественный нуль.

Приложения алгебры неопределенных величин многообразны. В основном они имеют наиболее общий, фундаментальный характер, например при решении некоторых философских проблем. Однако некоторые выходы ведут в проблематику классической математики, а также в некоторые вопросы физического мировоззрения.

Алгебра неопределенных величин идеально работает в решении парадоксов, связанных с представлениями о бесконечных числах или безгранично протекающих процессах. Например, Давид Гильберт, чтобы продемонстрировать необычные свойства бесконечности, придумал “парадокс Гранд-отеля”, в котором построено *бесконечное* число номеров, занятых бесконечным количеством приехавших на Вселенский конгресс ученых. Однако обнаружилось, что и бесконечное число ученых из соседней Метагалактики также хотели бы приехать на этот конгресс. Можно ли их разместить в этом же Гранд-отеле? Согласно Гильберту, оказывается, можно, если поочередно перемещать каждого гостя в соседний номер. Тогда – в туманной дали бесконечности – за последним занятым номером всегда должен найтись новый, еще свободный (в противном случае нарушается идея бесконечного количества номеров).

Эту же операцию предлагает совершить и Я. Сергеев со своим понятием “гросс-единицы” (◊), отображающей в себе весь массив чисел *бесконечного счетного множества* (*1, 2, 3 …*) Г. Кантора. Бесконечный ряд “гросс-единицы” трактуется как огромное, но *конеч-*

*ное* число, и в этом качестве, по мысли Сергеева, “гросс-единица” может успешно участвовать даже в решении дифференциальных уравнений, например, $\{[(\Diamond - 1)^2/(\Diamond + 1)^2] - 1\}/\{[(\Diamond - 1)/(\Diamond + 1)] - 1\} = 2^1$.

Тем не менее, задача Гильберта этим методом не решается. Действительно, если все $\Diamond$ комнат заняты $\Diamond$ постояльцами, то в системе Я. Сергеева $\Diamond - \Diamond = 0$, т.е. “гросс-единица” тождественно равна сама себе (в противном случае неверным становится приведенное выше уравнение). Но тогда, сколько ни передвигай постояльцев отеля в соседние номера, последнему из них податься некуда. Да и зачем их передвигать, если новых участников можно было бы сразу заселять в незанятые номера, которых, увы, нет!

Алгебра неопределенно больших величин решает задачу Гильберта без всяких операций переселения и без каких-либо предварительных условий. Если в гостинице построено $\Re$ номеров и в $\Re$ из них уже живут $\Re$ постояльцев, то присоединить к ним еще $\Re$ участников конференции не составляет никакой проблемы, так как их общее число всегда $\Re + \Re = \Re$. Администратор “Гранд-отеля”, кроме того, всегда знает количество свободных номеров, так как $\Re - \Re = q$. Как уже говорилось, это *любое произвольное* число, но при необходимости оно может стать сопоставимым с неопределенно большим $\Re$, что потребовалось бы нашему конгрессу и что полностью разрешает данный парадокс.

С помощью алгебры неопределенных величин легко разгадываются и знаменитые апории Зенона. Не будем анализировать их все, покажем, для примера, лишь “Стрелу”.

Эта апория звучит так: “выпущенная из лука стрела никогда не достигнет цели, так как в любой *точке* своего пути она неподвижна”. Зенон делит временной интервал полета на *бесконечное* число мгновений, а траекторию полета – на *бесконечное* число отрезков. Последовательная логика ведет его к мысли, что когда-то (в бесконечной дали делений) он выйдет на тождественно нулевые интервалы времени и нулевые перемещения $n/\infty = 0$; и феномен “полета” стрелы станет необъяснимым (действительно, не только $0 \times R = 0$, но даже $0 \times \infty = 0$).

Алгебра неопределенных величин дает однозначный и совершенно другой вывод.

Разделим траекторию стрелы, пролетающей расстояние $s$, на неопределенно большое число микроскопических отрезков, не обязательно одинаковых ($s$: $1, 2... i$). Тогда длина каждого может быть определена как:

$$s_i = s/\Re = \theta; \; (s = \theta \times \Re).$$

Время полета $t$ также представимо как неопределенно большое количество мельчайших временных интервалов:

$$t_i = t/\Re = \theta; \; (t = \theta \times \Re).$$

Тогда из соотношения $s_i/t_i = v_i$ следует $\theta / \theta = q$ (где *q никак не может* быть равно тождественному нулю, ибо $s_i$ и $t_i$ вещественны: стрела *уже* пролетела некоторое расстояние за некоторое время). В свою очередь это значит, что скорость стрелы ($v_i$) также ни при каких обстоятельствах *не может быть абсолютно нулевой* – она *всегда* имеет *вещественное количественное выражение* ($q \neq 0$). Вывод Зенона о *покоящейся* в точках пути стреле сделан некорректно (подобное попросту не может существовать!).

Истинный парадокс этой апории, однако, заключается в другом. Оказывается, метод Зенона не позволяет выйти на какую-либо *строгую размерность* (*меру*) в определении расстояний и скоростей, ибо *q – любая* мыслимая величина, а общепринятые в физике стандарты *м*; *м/с* (как, впрочем, и любые другие точные меры, скажем, *ангстрем в наносекунду*) – величины всегда конкретные! Впрочем, здесь мы оказываемся в понятийном пространстве, требующем большого и специального разговора.

Несмотря на свою древность, апория “Стрела” непосредственно ведет к разработке идеи “мгновенной скорости”, широко распространенной в механике. Здравый смысл говорит: если скорость $v_i$ задавать через постоянное ускорение $a$, то ее значение в любой момент времени $t_i$ от начала движения математически весьма точно отображается отношением $v_i = a\, t_i$. Данный тезис верен, при условии, что ускорение $a$ идеально в своём постоянстве. Но чаще имеют дело с замерами “мгновенной скорости” по пройденному пути

$s$ и времени его прохождения $t$, что для точных расчетов менее удобно, так как интервал пути $s_i$. непрестанно меняется и его трудно точно схватить в едином временном *мгновении*, которое, к тому же, не может считаться истинно нулевым.

Тем не менее, в механике "мгновенную скорость" традиционно выражают через дифференциальное отношение $v = ds/dt$, видимо, веря (согласно Зенону), что где-то в глубинах бесконечно малых приращений $s$ и $t$ скорость $v$ станет *абсолютно точно* соответствовать истинно "мгновенной".

Здесь мы снова сталкиваемся с парадоксом *трансфертизации*, когда наше сознание не в силах разорвать "очевидные", но ложные логические связи.

Рассмотрим ситуацию, когда объект, двигаясь с произвольным (не обязательно равномерным) ускорением за интервал времени между $t_a$ и $t_b$, пройдя прямолинейный отрезок пути по оси абсцисс от $0$ до $x_b$, приобрел некоторую скорость $v_b$ относительно точки $0$. Для обыденного сознания представляется аксиомой то, что реально существует *безграничное* число мгновений, для которых три величины: $t_i$, $x_i$ и $v_i$ имеют абсолютно точные взаимосоответствующие значения, в том числе, и *мгновенные скорости*.

Однако при ближайшем рассмотрении здесь явственно проступает тень зеноновской "Стрелы", с той лишь разницей, что Зенон полагает стрелу в любое точечное мгновение неподвижной, а современный нам физик – обладающей конкретной мгновенной скоростью.

Главный камень преткновения – само понятие *мгновенности* в условиях, когда *переменная* скорость изменяется и измеряется на исчезающе малом (практически нулевом) интервале времени. "Здравый смысл" упорно ведет к выводу, что в случае, если, скажем, скорость монотонно росла вплоть до значения *7 м*/с, то она непременно должна пройти значение, к примеру, *5,5 м*/с. Это представляется бесспорным, но здесь-то и скрыт логический подвох нашего сознания. Мы уверены, что измерительная техника (если не сегодняшняя, то будущая) может *точно* зафиксировать значение скорости *5,500000000000000... м/с*. Но в таком случае она должна *столь же точно* зафиксировать *5,497643963028491...м*/с при неограниченном количестве значащих цифр. Кроме того, необходимо столь же точно профиксировать и бесчисленное множество всех промежуточных между *5,500000000000000...* и *5,497643963028491...* значений скорости!

Сказанное – не просто вопрос точности измерения, которая хотя и растет, но всегда имеет и *всегда будет иметь* границы. Важнейшее методологическое положение физического (да и математического) мировоззрения заключается в том, что ни в каком *процессе* и ни для какого *процессуального* параметра *нельзя потребовать* неукоснительного выполнения условий *мгновенности*, так как при всей теоретической очевидности, *в природе* его попросту *не существует*! Любое "мгновенное значение" (реальное и даже воображаемое) любых параметров всегда несколько размазано по шкале значений (в известном смысле об этом же говорит и знаменитое *соотношение неопределенностей* Гейзенберга).

Поясним сказанное. Чтобы создать условия истинной *мгновенности*, необходимо определиться с приращениями параметров $\Delta$ в их околонулевых (назовём их *зеноновыми*) областях. Зенон требует, чтобы в границах описания его "движения" (вернее, зеноновой "неподвижности") выполнялись соотношения: $\Delta(t_i)/\infty = 0$; $\Delta(x_i)/\infty = 0$; $\Delta(v_i)/\infty = 0$, что, мягко говоря, не может соответствовать действительности, так как все приращения *вещественны* и отличны от тождественного нуля (в противном случае – и в этом Зенон достигает цели – устраняются сами *процессы*, в нашем случае – процессы течения времени, движения и ускорения).

Реальная природа располагает двумя другими соотношениями: $\Delta(t_i)/\Re = \theta$; $\Delta(x_i)/\Re = \theta$; $\Delta(v_i)/\Re = \theta$ или $\Delta(t_i)/R = \varepsilon$; $\Delta(x_i)/R = \delta$; $\Delta(v_i)/R = \mu$, где малые области значений $\mu$, $\delta$, $\varepsilon$, $\theta$ не являются тождественными нулями (единственными потенциальными кандидатами для выражения "мгновенности").

Еще раз посмотрим на скрытые смыслы понятия "погрешность измерения". Экспериментатор говорит, что измерил скорость *5,5 м/с* с погрешностью *±0,00002 м*/с. Легче всего из этого заключить, что точное значение скорости *5,5 м/с* как раз и лежит в диапазоне между *5,49998* и *5,50002*. Но это неверно. На самом деле экспериментатор заявляет, что предполагаемое им “точное значение” *5,5 м/с* может *в равной степени* относиться к любой точке на шкале скоростей шириной $\mu = 0{,}00004$. И количество таких точек и, в том числе, “мгновений” времени (для которых $\upsilon_i$ “равно *5,5*”) заранее не ограничено: $\mu / \theta = \mathfrak{R}$. Для каждой из них можно очертить диапазон значений *5,49998 – 5,50002 м/с*.

Поэтому и определение мгновенной скорости по, казалось бы, более удобной формуле $\upsilon_i = at_i$ не способно дать абсолютно точный результат, так как, во-первых, параметр $t_i$ также всегда “размазан” по некоторой области значений ($\varepsilon$ или $\theta$), а, во-вторых, в природе вряд ли отыщется какой либо процесс с абсолютно постоянным ускорением (даже падение тел в вакууме не может сохранять постоянства ускорения, так как с приближением падающего тела к гравитационной массе ускорение неминуемо растет).

Привычное для физика выражение *ds/dt*, олицетворяющее мгновенную скорость, вообще говоря, двойственно. Оно часто символизирует предел, к которому стремится известный или заданный заранее параметр $\upsilon_i$. Например, при переменноускоренном движении изучают измеряемые отношения *s/t* в нескольких приближениях к моменту времени $t_i$: скажем, расстояние *15 м* пройдено за *5,569 с*; *1,2 м* за *0,433 с*; *0,05 м* за *0,00982 с*; *0,000051 м* за *0,0000093 с*. Последнее отношение будет наиболее точным, всё более приближающимся к пределу $\upsilon_i = 5{,}497643963028491...$ *м/с*.

Но формулу *ds/dt* придется применить и в том случае, когда в условиях эксперимента удается измерить параметры пути и времени только в непосредственной близости от точки $t_i$. Чем же следует руководствоваться, исходя из стандартного выражения дифференциалов? Ведь оно ничего не говорит о способах или пропорциях сечения пространственных и временных объектов. Единственное требование здесь – подойти как можно ближе к нулевым, исчезающе малым значениям. Значит, может возникнуть ситуация, когда параметр *dt* даст, скажем, область фиксации $10^{-20}$ *с*, а параметр *ds* – область менее $10^{-7}$*м*. Ясно, что никакого правильного представления о мгновенной скорости из этих данных составить нельзя.

Системный экспертный анализ с помощью алгебры неопределенных величин показывает, что такое *безразмерное* дифференциальное определение неизбежно вырождается в физически бесполезную комбинацию: $s/\mathfrak{R} : t/\mathfrak{R} = q$. Таким образом, стремясь сделать свои вычисления соответствующими высокому абстрактному уровню чистой математики, физики невольно лукавят, в то время как им следовало бы признать, что правдивое описание практически всех физических процессов возможно только на точном и жестко арифметизированном языке *R-алгебры*.

В “нормальной” мирской механике будут иметь смысл только аналитические выражения $\upsilon_{cp} = \Delta(s) : t/R$ или $\upsilon_{cp} = s/R : \Delta(t)$ (изначально опирающиеся на точные числовые значения и стабильную систему физических мер). Здесь *t/R* означает строгую пропорцию измеряемого временного интервала со стандартной астрономической секундой, а *s/R* – строгую пропорцию с Международным эталоном метра.

Масштабный показатель *R* (в отличие от $\mathfrak{R}$) – число хотя и достаточно большое, но принимаемое нами за *абсолютно точное*. Скажем, скорость измеряется в промежутке времени *1/1000 000 секунды*. Устанавливаем масштаб: *1/R секунд* (проще полагать, что $R = 10^6$). За это время объект смещается, скажем, на $\Delta(s) = 0{,}0135$ *м*. Значит, его в достаточной мере “мгновенная” скорость на этом временном промежутке составляет в избранном масштабе и при необходимой экстраполяции условий нашего “мгновенного” эпизода на макроуровень с реальными метрами и секундами:

$$\upsilon = \Delta\,(s) \cdot R = 13\,500 \text{ м/с},$$

разумеется, с учетом некоторых погрешностей измерений.

Феномен невоспроизводимых величин встречается в процессе изучения природы, да и в самой повседневной жизни весьма часто. Тем не менее, он практически не попал пока в поле зрения ученых. Забавной иллюстрацией его может стать известный пример из теории вероятностей. Теоретически допускается, что обезьянка, беспорядочно стучащая по клавишам пишущей машинки, когда-нибудь напишет “Буря мглою небо кроет, вихри снежные крутя". Правда, в таком случае она когда-нибудь выстучит также и фрагмент Библии, и протокол допроса Бухарина в НКВД.

Все созданные человечеством тексты являются выборками из буквенной комбинаторики. Если б удалось провести полную опись комбинаторных вариантов из букв в пределах какого-либо количественного стандарта, в эту густую сеть попались бы *все* мыслимые тексты, не превышающие длиной этот стандарт. Поэтому кажется, что вероятность стихийного набора знакомой фразы равна вероятности появления любого бессмысленного набора букв. Однако именно это и не так. Речь ведь идет не столько о *вероятности случайного набора* данной фразы, сколько о ее *повторном* наборе: ведь фразу эту кто-то *уже* набрал! Для большей ясности положим, что одна из обезьянок выстучала *21* клавишу в любой произвольной комбинации, после чего мы дали им номиналы букв и пробелов, обеспечивающих фразу "Буря мглою небо кроет", а другая обезьянка должна это точно *повторить*!

Именно в подобном случае мы и сталкиваемся с *невоспроизводимыми величинами*, т.е. реальными буквенными, числовыми, графическими или иными комбинациями, которые возникают в природе лишь *однажды* и их повторение заведомо невозможно. Это могут быть комбинации случайных чисел, которые создает машина, редкие последовательности выпадения цифр и цветов в рулетке. Это графики излучения космических объектов, регистрация обстоятельств солнечных вспышек, погодных и иных условий. Это распределение молекул газа по скоростям и направлениям движения, распределение электронных импульсов, регистрируемых при рентгеновском облучении вещества.

Физики всегда пытаются получить *воспроизводимые* объекты – именно они дают основание говорить о строгой научности в изучении природы и о соответствии опыта теоретическим моделям, которые, в силу высокой степени математизации этой науки, требуют *исключительно* условий воспроизводимости. Стохастические результаты не очень устраивают физиков, хотя природа (особенно на уровне микромира) как раз больше настроена на невоспроизводимость своих эффектов.

Рассмотренные выше объекты $\Re$ и $\theta$ также являются невоспроизводимыми величинами, поэтому-то в конкретной серии математических операций или в пределах даже одного уравнения они никогда не смогут быть тождественными.

Невоспроизводимые величины необходимо широко включать в контекст математических или логических операций. Для этого нужна особая *алгебра невоспроизводимых величин*. В отличие от неопределенно больших и неопределенно малых величин, невоспроизводимые величины могут иметь не только экстремально полярные области значений, но и любые другие. Установим пять таких областей значений. Одна из них – $m$ – область человеческого опыта, условно простирающаяся от $10^{-8}$ до $10^{8}$. Область $R$ – зона больших, но вполне определенных величин, скажем, $3{,}97327 \times 10^{17}$. Область $\delta$ – зона весьма малых, но также вполне определенных значений, например, $2{,}8179409238 \times 10^{-15}$. Наконец, области $\Re$ и $\theta$ – зоны неопределенно больших и неопределенно малых величин.

Таким образом, в обозначении невоспроизводимой величины будет лежать и символ ее области значений: $\Psi_{\Re}, \Psi_{\delta}, \Psi_{m}$. Вот начатки алгебры невоспроизводимых величин (символ $\Psi_{\varepsilon}$ означает произвольную область значений; индексы $+1$ и $-1$ означают переход в соседнюю область, если считать положительным направлением вектор $\theta \rightarrow \delta \rightarrow m \rightarrow R \rightarrow \Re$):

$$\Psi_{\varepsilon} + \Psi_{\varepsilon} = \Psi_{\varepsilon};\ \Psi_{\varepsilon} - \Psi_{\varepsilon} = q < \varepsilon;\ \Psi_{\varepsilon} + n = \Psi_{\varepsilon};\ \Psi_{\varepsilon} / n = \Psi_{\varepsilon};\ \Psi_{\varepsilon} \cdot n = \Psi_{\varepsilon};\ \Psi_{\varepsilon} / \Psi_{\varepsilon} = q;$$

$$\Psi_{\varepsilon}^{\,n} = \Psi_{\varepsilon \pm 1};\ R \cdot \Psi_{\varepsilon} = \Psi_{\varepsilon \pm 1};\ \Re \cdot \Psi_{\varepsilon} = \Re;\ n^{\Psi} = q;\ \Psi_{\varepsilon} / \theta = \Re;\ \Re / \Psi_{\varepsilon} = \Re;\ \Psi_{\varepsilon} / \Re = \theta.$$

Интересными приложениями к этой алгебре являются выражения для некоторой суммы невоспроизводимых величин

$$\Sigma\Psi_{\varepsilon} = \varepsilon \cdot q,$$

а также для произведений:

$$\Psi_{\Re} \times \Psi_{\theta} \sim \Psi_{R} \times \Psi_{\delta} \sim \Psi_{m}.$$

К сожалению, невоспроизводимые величины нельзя класть основанием фундаментальных теорий, в то же время с ними можно успешно работать в области широкомасштабных статистических или синергетических исследований. Тогда может пригодиться и предложенная здесь алгебра.

Самый сложный физический объект, имеющий синергетическую природу – погода. В ее формировании участвует огромное число невоспроизводимых по величине, по геометрическим и векторным соотношениям параметров. Сейчас погоду умеют вычислять гораздо точнее, нежели двадцать – тридцать лет назад. Но и сейчас, и в ближайшем будущем точность предсказаний вряд ли станет предельно надежной. С другой стороны, достаточно хаотические наборы как относительно стабильных, так и постоянно изменяющихся параметров, формирующих погоду, чаще всего приводят к довольно типичным случаям. В этом видится важное следствие синергетики: при полной невозможности повторения всей совокупности метеорологических условий формируются такие их синглеты, которые обеспечивают видимую повторность и даже относительную стабильность большинства погодных феноменов (скажем, *ясно*, *солнечно*, *тепло*, *дождливо*, *ветрено* и т.д.).

На языке алгебры невоспроизводимых величин эту ситуацию можно отразить следующим образом:

$$\Sigma(\Psi_P \cdot \Psi_W) = \boldsymbol{A, B, C, D}; \quad \Sigma(\Psi_P \cdot \Psi_W) + \Sigma(\Psi_R \cdot \Psi_V) = \boldsymbol{X, Y, Z},$$

где $\Sigma(\Psi_P \cdot \Psi_W)$ – сумма некоторого набора ($\Psi_P$) параметров $\Psi_W$, делающих погоду, которую для типичных случаев можно выразить как ***A, B, C, D***. Для *экстремальных* случаев ***X, Y, Z*** соответствующий набор дополняется экстремальным пакетом параметров $\Sigma(\Psi_R \cdot \Psi_V)$.

Почти все земные процессы, которые мы представляем себе как относительно *стабильные*, являются среднестатистическими состояниями синергетического поля множественных уникальных параметров.

Наиболее ярким синергетическим объектом природы является, видимо, *физическое пространство*. Всем хорошо известна эйнштейновская теория относительности, постулирующая относительный характер скорости. Однако основу данного явления составляет *неопределенность* в измерении самого *пространства*.

Когда мы измеряем некоторое расстояние (например, длину дорожки в саду) под нашей рулеткой вместе с Землей по орбите Солнца успевают проскочить сотни километров, а вместе с Солнцем по орбите вокруг центра Галактики промелькнут свои тысячи километров, наконец, вместе с нашей Галактикой по отношению к далеким квазарам будут “пропаханы” уже миллионы километров (причем как бы “одновременно во все стороны”, так как выявить какое-то превалирующее направление во Вселенной не представляется возможным!).

В свете сказанного, важно то, что у самого пространства *нет никакой* собственной структуры, меры, размерности: любой измеренный сантиметр может оказаться одновременно огромным космическим расстоянием. Для такого понимания относительности пространства прекрасно подойдут уравнения неопределенных величин. Если бы у нас была возможность, отмеряя свои отрезки длины на Земле, мгновенно ставить фишки в реальном и более широком космическом пространстве, которое способен созерцать покоящийся в космической системе координат сторонний наблюдатель – отмеренные нами метры для него могли бы выглядеть как последовательность весьма разных интервалов (скажем, *10 243 м, 27 821 м*, *9 275 м* и т.д.). Разница зависит от времени, за которое отмерен тот или иной метр. Математически выразить эту ситуацию можно так:

$$qn = q,$$

где $q$ может принимать любые (разумные) численные значения. Для землян единичное $q$ соответствует одному метру, для стороннего наблюдателя результаты замеров $qn$ (даже если $n$ невелико, скажем *4* или *9*) выглядят подчас как десятки, сотни или тысячи километров.

Относительность скорости, таким образом, является следствием относительности пространства. Поэтому любую постоянную скорость, заданную параметрами $v = s/t$ в обобщенном космическом смысле можно выразить через $v = q(s)/t = q(v)$.

Известный английский математик Дж. Литлвуд предложил способ записи очень больших ("непредставимых") чисел в виде многоэтажных степенных показателей, наподобие тех, о которых говорилось в начале статьи: "десять в степени десять в степени десять… в десятой степени". Он же установил, что при количестве этажей свыше двух квадраты чисел уже неотличимы от самих этих чисел, а свыше трех – неотличимы и все другие степени. Этот вывод поначалу кажется странным, так как квадрат увеличивает число значащих цифр примерно вдвое, куб – втрое и т.д. Еще более удивительно, что фактически "равными" становятся трехэтажные числа при любых исходных основаниях свыше двух ($2^{3E} = 10^{3E} = 1000\,000^{3E}$ и т.д.). Однако это действительные следствия предложенной Литлвудом *суперлогарифмической* записи чисел. Многоэтажные показатели могут быть выражены любыми десятичными дробями – тогда, например, $(10^{4,78\,E})^{13} = 10^{4,7800...\,E}$, т.е. возведенное в тринадцатую степень суперчисло практически равно (по форме многоэтажной записи) самому себе, ибо отличия появятся лишь в невообразимо далеких знаках показателя многоэтажности после запятой: *4,7800000000000………1 E*.

Данный способ исчисления находится, как видим, на полпути к алгебре неопределенно больших величин с ее несколько непривычными пока для пользователей следствиями.

Кантор, как известно, пришел к выводу о том, что счетное бесконечное множество и множество континуума имеют принципиально разные "мощности", т.е. они не сопоставимы по масштабам и свойствам. Как мы видели ранее, величины $\mathfrak{R}$, получаемые в разных формулах или стоящие на разных местах в одной формуле, действительно должны разниться – это же *невоспроизводимые числа!* Но даже в весьма жестком выражении $\mathfrak{R}^{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$, какой-то особой *принципиальной* разницы между первым и последним его элементом нет. Разумеется, второй намного больше первого, но отнюдь не *принципиально* больше ("мощнее" по Кантору).

Если признать справедливость третьей апории Зенона и навсегда отбросить некорректную мысль о том, что числовая прямая может быть составлена из бесконечного ряда бестелесных точек (напомним, что $\mathfrak{R} \times 0 = 0$; $\mathfrak{R} \times \theta = q$ без каких-либо исключений!), то между счетным и континуальным множествами (мы снимаем здесь опасное определение "бесконечными") можно установить *полное соответствие*. Это легко понять и без применения алгебры неопределенных величин. Организуем мысленно процесс безграничной дихотомии и параллельно каждому последующему делению исходного отрезка будем записывать новую единицу для двоичного представления конкретного числа. Ясно, что мы поставим ровно столько единиц, сколько раз разделим отрезок! С другой стороны, мы можем безгранично *удваивать* исходный отрезок, сопровождая это таким же прибавлением единиц. Можно одновременно и безгранично делить отрезок и безгранично удваивать его, ставя в каждом таком цикле две последовательные единицы. Таким образом, "континуальная" математическая прямая сколь угодно детально исследуется как вглубь – ко всё более мелким $\theta$, так и ввысь – ко всё более крупным $\mathfrak{R}$. Одновременно ведется параллельный счет шагов, откуда становится ясно, что *счетное* множество и множество *континуума* – взаимно *соизмеримы*, т.е. абсолютно одинаковы по мощности.

На языке алгебры неопределенных величин дилемма множеств представляется иным способом. Допустим, что концепция Кантора справедлива и мы с полным основанием вводим новый математический объект – *неопределенно большую величину мощности континуума* (обозначим ее символом $\mathfrak{I}$). Тогда возникает вопрос: как ее вписать в уже существующие отношения величин $\mathfrak{R}$, $\theta$, $q$, $n$? Если полагать, что $\mathfrak{I}$ просто *больше* $\mathfrak{R}$, то не избежать вопроса: а на сколько больше? В этом качестве новая величина не дает никакого нового эффекта, так как является той же самой неопределенно большой величиной, только "еще большей". Видимо, Кантор полагает ее *принципиально* иной, ведь "мощности" $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{R}$ именно *несопоставимы*. Подобная принципиальная инаковость, несоизмеримость и постулируемое *новое* качество логически понимаемы только в одном случае – если допустить (возвращаясь к Зенону) отношение $\mathfrak{I} \times 0 = q$, что абсолютно невероятно ("ничто" *никогда* не способно породить "нечто").

В таком случае у нас на выбор три вывода: 1) $\mathfrak{I}$ – некая непознаваемая логическим методом сущность, количественный объект, не вписывающийся в математическое пространство, наподобие актуальной бесконечности; 2) идея Кантора о принципиальной несоизмеримости мощности континуума, для которого возможно уравнение $\mathfrak{I} \times 0 = q$, неверна; 3) континуальное множество следует понимать только как возможность *неограниченной детализации* математической числовой прямой (возможность ее практически безграничного деления или увеличения, в том числе за счет безграничной детализации десятичных знаков после запятой). В рамках двух последних предположений какая-либо поляризация неопределенно больших величин по "мощности" заведомо некорректна.

Возможно (и наиболее вероятно), что ученый до конца не мог примириться с собственной мыслью о том, что любой мельчайший фрагмент безграничного континуума делится на части с той же степенью безграничности, что и сам этот континуум. Данное следствие парадокса трансфертизации предельно точно отображается алгеброй неопределенных величин: $\mathfrak{R} : \mathfrak{R} = q$; $q : \mathfrak{R} = \theta$; $\theta : \mathfrak{R} = \theta$ и т.д.!

Мы попытались показать лишь наиболее актуальные узловые точки приложения алгебры неопределенных и невоспроизводимых величин к решению некоторых философских, математических и физических проблем. Дальнейшие исследования, надеемся, расширят область приложения изложенного метода.

## ЛИТЕРАТУРА

Вопенка 1983 – *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. М., 1983.
Лавин 1994 – *Shaugan Lavine.* Understanding the Infinite. Harvard Univ. Press, 1994.
Сергеев 2003 – *Sergeyev Y.D.* Arithmetic of infinity. Edizioni Orizzonti Meridionali, CS, 2003.

## Примечания

[1] Легко проверить это утверждение, если взять за условное значение "гросс-единицы", например $10^6$. Тогда: $\{[(10^6 - 1)^2 / (10^6 + 1)^2] - 1\} / \{[(10^6 - 1) / (10^6 + 1)] - 1\} = 1,999998$, а при значительном увеличении этого условного значения результат будет всё более стремиться к двум, хотя никогда и не станет ему абсолютно равным.

[2] Здесь и далее символом $R$ в отличие от $\mathfrak{R}$ обозначается какое-то большое, но вполне точное число, скажем $10^{10}$.